BASIC DEA MODELS

The Productivity and Efficiency Analysis

By Carlos Sanchez-Gonzalez

MODELOS DEA BÁSICOS

Análisis de Productividad y Eficiencia

Por Carlos Sánchez-González

In the January 2012 newsletter (Boletín de Economía y Negocios de enero de 2012) we focused on some concepts regarding productivity and efficiency and we said that the DEA has been one of the most frequently applied methodologies. In the present article we want to retake up some issues and to briefly explain the DEA models that are more commonly applied in the scientific literature. Each model is explained starting with its technical formulation, making special mention of the SBM model, and we consider it more current and improved.

Farrell (1957) made some important contributions on the issue of productivity and efficiency, specifically speaking of "productive efficiency"[1]. He begins by saying that there has been a total neglect of the theoretical side to measure efficiency since for a long time it was considered adequate to measure the average productivity around specifically of the labor and to use it as a measure of efficiency. This is a patently unsatisfactory measure for him because it ignores all other inputs besides labor. Farrell's (1957) proposes a satisfactory measure of productive efficiency in U.S. agricultural production. This measure takes into account all inputs and yet avoids index number problems, to show how it can be computed in practice, and to end with an estimate of the relevant production function. One of the most important features of this method is the distinction between technical efficiency and allocative efficiency. The first one measures a firm's success in producing maximum output from a given set of inputs, while the second one measures the success in choosing

[1] There were other interesting statistical contributions before Farrell (1957). We could mention Cobb and Douglas (1928), which is commonly known as Cobb-Douglas production function. These authors describe the relationship between the time series on manufacturing output, labor input, and capital input. Their equation displayed constant returns to scale, assumed unchanged technology, and omitted land and material inputs. Malmquist (1953) also proposed the total factor productivity (TFP) which is a measure of the changes in total output relative to inputs as well as the distance function approach. TFP is a productivity measure that combines labor and capital as inputs too.

En el boletín informativo de enero de 2012 (Boletín de Economía y Negocios de enero de 2012), nosotros nos enfocamos en algunos conceptos que tienen que ver con la productividad y eficiencia, y mencionamos que la DEA ha sido una de las metodologías más aplicadas. En el presente artículo queremos retomar algunos aspectos y explicar brevemente los modelos DEA que son más comúnmente aplicados en la literatura científica. Cada modelo se explica empezando con su formulación técnica, mencionando especialmente el modelo SBM, y lo consideramos más actual y mejorado.

Farrell (1957) hizo algunas contribuciones importantes en cuestiones de productividad y eficiencia, especialmente hablando de la "eficiencia productiva"[1]. Él empieza mencionando que ha habido un total descuido del lado teórico para medir la eficiencia, ya que por mucho tiempo fue considerado muy adecuado el medir la productividad promedio, específicamente del trabajo y usarla como una medida de eficiencia. Aquella es claramente una medida no muy satisfactoria para él porque ignora todos los otros aportes además del trabajo. El trabajo de Farrell (1957) propone una medida de eficiencia productiva mucho más satisfactoria en la producción agrícola de los Estados Unidos. Esta medida toma en cuenta todos los aportes; y, lo que es más, evita los problemas de índice de números, para mostrar como se puede calcular en la práctica, y para terminar con un estimado de la función de producción relevante. Una de las características más importantes de este método es la distinción entre eficiencia técnica y eficiencia asignada. La primera mide el éxito de una firma en la producir el máximo de su rendimiento

[1] Hubo otras contribuciones estadísticas interesantes antes de Farrell (1957). Podríamos mencionar a Cobb y Douglas (1928), lo que se conoce como la función de producción de Cobb y Douglas. Estos autores describen la relación entre las series de tiempo de rendimiento de la manufacturación, aportes de trabajo y aportes de capital. Su ecuación muestra constantes regresos a la escala, asume tecnología que no se puede cambiar y omite los aportes del suelo y los materiales. Malmquist (1953) también propuso el factor total de la productividad (TPF), el cual es una medida de los cambios en la producción total relativa a los aportes, así como también el alcance de la función de distancia. El TPF es una medida de productividad que combina el trabajo y el capital como aprtes también.

an optimal set of inputs. These two measures are then combined to afford a measure of total economic efficiency[2].

Measures in decision making efficiency were initially applied to evaluate public programs, where each program had a collection of decision making units (DMU's) with common inputs and outputs, and focused on decision making rather than profits[3]. For instance, in an educational program, the efficiency of various schools (DMU's) was measured by reference to outputs involving the standard education categories such as cognitive or affective skills. The inputs could similarly range from fairly easy-to-measure quantities like the number of teachers or the time spent in program activities by community leaders or parents. The measure of the efficiency was obtained as the maximum of the ratio of weighted outputs to the weighted inputs, subject to the condition that the similar ratios for every DMU should be less than or equal to unity (Charnes et al., 1978).

Based on Farrell (1957), Charnes et al. (1978) developed the well-known "Data Development Analysis" (DEA). This method identifies the production frontier as above, that is, it is necessary to find the maximum set of outputs that can be obtained from a given set of inputs. This frontier is a function that envelops or is restricted to the data sample. Essentially, DEA aimed at assessing the relative performance of a number of comparable DMUs, which may be across within a company or be different companies within an industry.

Just as there are many areas of application of the DEA, from public programs up to the private

[2] Farrell (1957) used the term price efficiency instead of allocative efficiency and the term overall efficiency instead of economic efficiency.

[3] Fried et al. (2008) presents a summary of the main empirical applications in public areas such as health care, transportations, and public areas between others.

utilizando un determinado grupo de datos. Estas dos medidas se combinan para permitir una medida de total eficiencia económica[2].

Las medidas en eficiencia de la toma de decisiones eran inicialmente aplicadas para evaluar programas públicos, donde cada programa tenía una colección de unidades de toma de decisiones (DMU) con aportes y rendimiento comunes, enfocados en la toma de decisiones más que en las ganancias[3]. Por ejemplo, en un programa de educación, la eficiencia de varias escuelas (DMU) era medida por referencia al rendimiento, involucrando las categorías de educación estándar tales como las destrezas cognitivas o afectivas. Los aportes podrían igual medir desde algo meramente fácil hasta cantidades como el número de profesores, o el tiempo que se dedicó a las actividades de los programas realizadas por los líderes de la comunidad o por los padres. La medida de la eficiencia se obtuvo como el máximo del radio del rendimiento pesado a los aportes pesados, sujeto a la condición de que los radios similares para cada DMU deben ser menores o iguales que la unidad. (Charnes y otros., 1978)

Basados en Farrell (1957), Charnes y otros, (1978) desarrolló el tan conocido "Análisis del Desarrollo de Datos" (DEA). Este método identifica la frontera de producción como se indica antes. De ese modo, se hace necesario encontrar el máximo grupo de resultados que se pueden obtener de un determinado grupo de datos. Esta frontera es una función que envuelve o es restringida para la muestra de datos. Esencialmente, el DEA apunta a evaluar el desempeño relativo de un número de DMU comparables, los cuales deben estar dentro de una compañía, o ser una compañía diferente dentro de una industria.

Como hay varias áreas de aplicación del DEA, de programas públicos hasta estudios financieros

[2] Farrell (1957) usó el término eficiencia de precio, en lugar de eficiencia asignada, y el término eficiencia global, en lugar de eficiencia económica.

[3] Fried y otros. (2008) presenta un resumen de las principales aplicaciones empíricas en áreas públicas como cuidado de la salud, transporte y otras áreas públicas.

financial studies, there are also many ways to implement DEA and many studies with different factors (inputs and outputs), depending on what is being evaluated or measured[4]. In most DEA models it is common to find that the scalar measure is between zero (poor performance) and one (good performance) after applying a linear programming model, i.e. the efficiency score results from measuring the distance of the assessed DMU from a composite benchmark or target unit that dominates it and lies on the efficient frontier (Cooper et al., 2000).

Schmidt (1985) classified the DEA as a non-parametric approach. Efficiency studies can be divided into those that measure technical efficiency, using non-parametric techniques such as DEA and FDH (free disposal hull), and those that measure that economic efficiency using parametric approaches such as SFA (stochastic frontier analysis), TFA (thick frontier approach) and DFA (distribution free approach)[5]. The parametric methods adopt a specific functional form of the cost, profit or production functions. In contrast, the non-parametric methods do not put any restrictions on the functional form of the relationship between inputs and outputs. In the case of financial institutions, it is not a simple task to specify this functional relationship in the production process, which explains that the non-parametric methods are predominantly applied for calculating efficiency of financial institutions.

[4] In the financial institutions the efficiency methods are useful in a variety of contexts, from agency problems to the control methodologies for the regulators and policy makers.

[5] Free Disposal Hull (FDH) approach is a more flexible model which is considered as a special case of DEA where the points on lines connecting the DEA vertices are not included in the frontier. The econometric stochastic frontier analysis (SFA) is a method that assumes a two-part or composed error term. The efficiency is assumed to follow an asymmetric distribution, usually half normal, while the random error is assumed to follow a standard symmetric distribution. The thick frontier approach (TFA) compares the average efficiencies of groups of firms instead of estimating the frontier edge. The distribution free approach (DFA) which employs the average residuals of the cost function estimated with panel data to construct a measure of frontier-efficiency cost. It does not impose a specific form on the distribution of efficiency but assumes that there is a core efficiency or average efficiency for each firm that is constant over time. Lovell (1993) provides an excellent introduction to the different methods used in the last 40 years.

privados, hay también muchas formas de implementar el DEA y muchos estudios con diferentes factores (datos y rendimientos), dependiendo de lo que se esté evaluando o midiendo[4]. En la mayoría de modelos es común encontrarse con que la medida de escala está entre cero (pobre desempeño) y uno (buen desempeño), después de aplicar un modelo de programación lineal. Ejemplo: el rango de eficiencia resulta de medir la distancia de las DMU evaluadas desde un punto de referencia compuesto o unidad del objetivo que lo domine y que esté en la frontera eficiente. (Cooper y otros., 2000).

Schmidt (1985) clasificó el DEA como un alcance no paramétrico. Los estudios de eficiencia pueden ser divididos en aquellos que miden la eficiencia técnica, utilizando técnicas no paramétricas como DEA y FDH (free disposal hull, casco de libre disposición), y los que miden la eficiencia económica usando alcances paramétricos como SFA (stochastic frontier analysis, análisis fortuito de frontera), TFA (thick frontier approach, alcance de frontera densa) y DFA (distribution free approach, distribución de libre acceso)[5]. Los métodos paramétricos adoptan una forma funcional específica del costo, ganancia o función de producción. En contraste, los métodos no paramétricos no ponen ninguna restricción en la forma funcional de la relación entre aportes y resultados. En el caso de instituciones financieras, no es tarea simple especificar esta relación funcional en el proceso de la producción, lo cual explica que los métodos no paramétricos son predominantes en su aplicación al calcular la eficiencia de las instituciones financieras.

[4] En las instituciones financieras los métodos de eficiencia son útiles en una variedad de contextos, desde los problemas de agencia hasta las metodologías de control para los reguladores y los que elaboran las políticas.

[5] El alcance del casco de libre disposición (FDH) es un modelo más flexible, es considerado como un caso especial de DEA donde los puntos de la línea que conecta los vértices del DEA no están incluidos en la frontera. El análisis econométrico fortuito de la eficiencia es un método que asume un término de error compuesto por dos partes. La eficiencia es asumida para seguir una distribución asimétrica, usualmente medio normal, mientras el margen de error es asumido para seguir una distribución simétrica estándar. El alcance bruto de frontera (TFA) compara las eficiencias promedio de grupos de firmas en vez de estimar la frontera límite. El alcance de libre distribución (DFA), el cual emplea los residuales promedios del costo de la función estimada con un panel de datos para construir una medida de costo de eficiencia de frontera. No se impone una forma específica en la distribución de la eficiencia, pero asume que hay una eficiencia central o eficiencia promedio para cada firma que es constante sobre tiempo. Lovell (1993) provee una excelente introducción a los diferentes métodos usados en los últimos 40 años.

There are several types of DEA, but the two models most extensively applied are the CCR model proposed by Charnes et al. (1978), which had an input orientation and assumed constant returns to scale (CRS); and BCC model proposed by Banker et al. (1984), which considers variable returns to scale (VRS). Subsequent some papers have considered alternative set of assumptions in the last years: the Pareto-Koopmans model by Charnes et al. (1985), the Russell measure by Färe and Lovell (1978), the slacks-based measure (SBM) introduced by Tone (2001), and the variants of the SBM approach (Tone, 2010).

Let us briefly review the basic ideas of each model. We begin with the input-oriented CCR model because this approach was the first to be widely applied in the DEA literature.

Based on the explanations of Cook and Seiford (2009), we consider a set of n DMUs, with each DMU j, $(j = 1, 2, 3, \ldots, n)$ using the same m inputs $x_{ij}(i = 1, 2, 3, \ldots, m)$, possibly in different amounts, and producing the same s outputs $y_{rj}(r = 1, 2, 3, \ldots, s)$, also possibly in different amounts. On the other hand, if the prices or multipliers $\bar{u}_r$, $\bar{v}_i$ related with outputs r and inputs i, correspondingly, are known, then using from conventional benefit/cost concept, the efficiency of DMU_j could be expressed as the ratio of weighted outputs to weighted inputs, i.e.:

$$\sum_r \bar{u}_r y_{rj} / \sum_i \bar{v}_i x_{ij} \qquad (1)$$

If the multipliers are unknown, Charnes et al. (1978) proposed deriving appropriate multipliers for a given DMU by solving a particular non-linear programing problem. Thus, the fractional programming problem, with an input-oriented model would be:

$$\max \theta = \sum_r u_r y_{ro} \Big/ \sum_i v_i x_{io}$$

s.t.

$$\sum_r u_r y_{rj} - \sum_i v_i x_{ij} \leq 0, \quad for\ all\ j$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad all\ r, i. \qquad (2)$$

Hay diferentes tipos de DEA, pero los dos más ampliamente aplicados son los modelos CCR propuestos por Chames y otros (1978), que tienen una orientación de aportes y tienen retornos constantes a escala (CSR); y el modelo BCC propuesto por Banker y otros. (1948), el cual considera varios retornos a escala (VRS). Los subsecuentes documentos han considerado un grupo alternativo de asunciones en los últimos años: el modelo Pareto – Koopmans de Chames y otros. (1985), la medida Russell por Fare y Lovell (1978), la medida base más bien floja (SBM) presentada por Tone (2001), y las variables del alcance SBM (Tone, 2010).

Revisemos brevemente las ideas básicas de cada modelo. Empezamos con el modelo aporte orientado CCR, porque este alcance fue el primero que fue ampliado de modo global en la literatura de DEA.

Basados en las explicaciones de Cook y Seiford (2009), se considera un grupo de n DMUs, con cada DMU j, $(j = 1, 2, 3, \ldots, n)$ usando los mismos aportes m,x_{ij} $(i = 1, 2, 3, \ldots, m)$, posiblemente en cantidades diferentes, y produciendo los mismos resultados s,y_{rj} $(r = 1, 2, 3, \ldots, s)$, posiblemente en cantidades diferentes también. Por otra parte, si los precios o los múltiplos $\bar{u}_r$, $\bar{v}_i$ relacionados con los resultados r y los aportes i, respectivamente, son conocidos, luego usando desde el costo beneficio convencional, la eficiencia del DMUj podría ser expresada como el radio de los resultados de peso a los aportes de peso. Ejemplo:

$$\sum_r \bar{u}_r y_{rj} / \sum_i \bar{v}_i x_{ij} \qquad (1)$$

Si los múltiplos son desconocidos, Chames y otros (1978), propusieron que se derive múltiplos apropiados para un DMU dado, resolviendo un problema particular no lineal de programación. Esto es, el problema fraccional de programación, con el modelo de aporte orientado sería:

$$\max \theta = \sum_r u_r y_{ro} \Big/ \sum_i v_i x_{io}$$

s.t.

$$\sum_r u_r y_{rj} - \sum_i v_i x_{ij} \leq 0, \quad for\ all\ j$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad all\ r, i. \qquad (2)$$

Where y_{ro} is the output vector and x_{io} is the input vector of the DMU evaluated, ε is a non-archimedian value designed to enforce strict positivity on the output and input multipliers (u_r *and* v_i). The objective of this problem is to minimize inputs while producing at least the given output levels, i.e. to obtain values (weights) of u_r and v_i that maximize the ratio. The constraints mean that this ratio should not exceed 1 for every DMU. By virtue of these constraints, the optimal objective value θ^* is at most 1.

The problem(2) can be converted to an equivalent linear programming model applying the theory of fractional programing (See Charnes and Cooper, 1962; Charnes et al., 1978), making the following changes in the variables $u_r=tu_r$ and $u_i=tu_i$ where $t=(E_i v_i x_{i0})^{-1}$, Thus, we have the *multiplier* model:

$$max\ \theta = \sum_r u_r y_{ro}$$

s.t.

$$\sum_r v_r x_{io} = 1$$

$$\sum_r u_r y_{rj} - \sum_i v_i x_{ij} \leq 0, \quad all\ j$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad all\ r, i. \qquad (3)$$

and finally, this multiplier model can be expressed with a real variable θ and a non-negative set of variables λ ($\lambda_1, \ldots, \lambda_n$), making it equivalent to the linear programming problem; we have the *envelopment* or primal problem:

$$\min \theta_o - \varepsilon\left(\sum_r s_r^+ + \sum_i s_i^-\right)$$

s.t.

$$\sum_r v_r x_{io} = 1$$

$$\theta_o x_{io} = \sum_j \lambda_j x_{ij} + s_i^-, \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$y_{ro} = \sum_j \lambda_j y_{rj} - s_r^+, \qquad r = 1, \ldots, s$$

$$\lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0, \qquad all\ i, j, r$$

$$\theta_o \qquad unconstrained \quad (4)$$

Donde y_{ro} es el vector de resultado y x_{io} es el vector de aporte del DMU evaluado, ε es un valor no de Arquímedes designado para que se cumpla estrictamente en positivo en los resultados y aportes multiplicadores (u_r *and* v_i). El objetivo de este problema es minimizar los aportes, mientras se producen al menos los niveles de resultados dados. Por ejemplo para obtener valores (pesos) de u_r y de v_i que maximizan el radio[6]. Los límites significan que este radio no debe exceder 1 para cada DMU. Para ventaja de estos límites, el valor objetivo óptimo θ^* es a lo mucho 1.

El problema(2) puede ser convertido a un equivalente modelo de programación lineal, aplicando la teoría de programación fraccional. (véase Chames y Cooper, 1962; Chames y otros, 1978), haciendo los siguientes cambios en las variables $u_r=tu_r$ y $u_i=tu_i$, donde $t=(E_i v_i x_{i0})^{-1}$. De esta forma, tenemos el modelo multiplicador:

$$max\ \theta = \sum_r u_r y_{ro}$$

s.t.

$$\sum_r v_r x_{io} = 1$$

$$\sum_r u_r y_{rj} - \sum_i v_i x_{ij} \leq 0, \quad all\ j$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad all\ r, i. \qquad (3)$$

Y finalmente, este modelo multiplicador puede ser expresado con una variable real θ y un grupo de variables no negativas λ ($\lambda_1, \ldots, \lambda_n$) haciéndolo equivalente al problema de programación linear; tenemos el empaque del problema fundamental:

$$\min \theta_o - \varepsilon\left(\sum_r s_r^+ + \sum_i s_i^-\right)$$

s.t.

$$\sum_r v_r x_{io} = 1$$

$$\theta_o x_{io} = \sum_j \lambda_j x_{ij} + s_i^-, \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$y_{ro} = \sum_j \lambda_j y_{rj} - s_r^+, \qquad r = 1, \ldots, s$$

$$\lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0, \qquad all\ i, j, r$$

$$\theta_o \quad sin\ restricción \quad (4)$$

[6] Se puede invertir este radio y resolver el correspondiente resultado del modelo orientado, que intenta maximizar los resultados mientras se usa no más de la cantidad observada de cualquier aporte.

Note that the optimal solutions show both the occurrence of excesses of inputs and shortfalls in outputs, which were called *slacks* (s_i^-, s_r^+). Then, if $\theta < 1$ the objective DMU is inefficient. If an optimal solution satisfies θ=1 and s^+=0 and s^-=0 is called CCR-efficient. These both conditions taken together are also described as Pareto-Koopmans efficiency and denote that a DMU is efficient if and only if it is not possible to improve any input or output without worsening some other input or output.

Then, the constraint space of equation(4) defines the following production possibility set P:

$$P = \left\{ (x, y) \backslash x \geq \sum_j X_j \lambda_j, \quad y \leq \sum_j Y_j \lambda_j, \ \lambda_j \geq 0 \right\} \qquad (5)$$

Any semi positive linear combination of activities in P belongs to P, and it assumes constant returns-to-scale. The CCR model is appropriate when whole set firms are operating at an optimal scale. However, imperfect competition, government regulations, constraints on finance, etc., may cause a DMU to be not operating at optimal scale. BCC model by Banker et al. (1984) suggested adjusting the CCR DEA model to account for variable returns to scale (VRS). The use of the constant returns to scale (CRS) specification when not all DMUs are operating at the optimal scale, results in measures of *technical efficiency* that are mistaken for *scale efficiencies*. Thus, the use of the VRS specification allows for appropriate calculations of technical efficiency (Coelli et al., 2005).

Banker et al. (1984) simply added a convexity constraint on the λ_j. That is, the BCC model has its production frontiers *P*, now spanned by the convex hull of all the existing DMUs, namely $\sum_j \lambda_j = 1$to the CRS linear programing problem (equation 4) to provide the following model:

$$\min \theta_o - \varepsilon \left(\sum_i s_i^- + \sum_r s_r^+ \right)$$

s.t.

$$\theta_o x_{io} = \sum_j \lambda_j x_{ij} + s_i^-, \qquad i = 1, \dots, m$$

$$y_{ro} = \sum_j \lambda_j y_{rj} - s_r^+, \qquad r = 1, \dots, s$$

Nótese que las soluciones óptimas muestran dos cosas, el que existe exceso de aportes y escasez en resultados, lo cual se llama flojos (s_i^-, s_r^+) . Entonces, si θ<1 el objetivo del DMU es ineficiente. Si una solución óptima satisface θ=1 y s^+=0 y s^-=0 se llama CCR eficiente. Estas dos condiciones tomadas juntas se describen también como eficiencia Pareto Koopmans, y denota que una DMU es eficiente si y sólo si no es posible mejorar cualquier aporte sin empeorar algún otro aporte o resultado.

Entonces, el espacio limitado de la ecuación (4) define el siguiente grupo de posibilidad de producción P:

$$P = \left\{ (x, y) \backslash x \geq \sum_j X_j \lambda_j, \quad y \leq \sum_j Y_j \lambda_j, \ \lambda_j \geq 0 \right\} \qquad (5)$$

Cualquier combinación semi-positiva lineal de actividades P pertenece a P, y asume retornos a escala constantes. El modelo CCR es apropiado cuando todo el conjunto de firmas están operando a una escala óptima. Sin embargo, la competencia imperfecta, las regulaciones del gobierno, las restricciones en las finanzas, etc., pueden causar que una DMU no esté operando a escala óptima. El modelo BCC de Banker y otros. (1984) sugería ajustar el modelo CCR DEA para contar con retornos de variables a escala (VRS). El uso de especificaciones de retornos constantes a escala (CSR), cuando no todas las DMU están operando a escala óptima, resulta en medidas de eficiencia técnica que son erróneas para las eficiencias de escala. De este modo, el uso de especificaciones VRS permite cálculos apropiados de eficiencia técnica (Coelli y otros. 2005).

Banker y otros (1984), simplemente añadieron un límite de convexidad en λ_j. Esto es, el modelo BBC tiene sus fronteras de producción *P*, ahora expandido por el casco convexo de todas las DMU existentes, a saber $\sum_j \lambda_j = 1$ para el problema de programación linear (ecuación 4) que nos da el siguiente modelo:

$$\min \theta_o - \varepsilon \left(\sum_i s_i^- + \sum_r s_r^+ \right)$$

s.t.

$$\theta_o x_{io} = \sum_j \lambda_j x_{ij} + s_i^-, \qquad i = 1, \dots, m$$

$$y_{ro} = \sum_j \lambda_j y_{rj} - s_r^+, \qquad r = 1, \dots, s$$

$$\sum_j \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0, \quad all\ i,j,r$$

$$\theta_o \ unconstrained \quad \textbf{(6)}$$

This model essentially ensures that the projected point of the inefficient DMU on the BCC DEA frontier is a convex combination of observed DMUs. In this situation, the λ-weights do not sum to a value less than or greater than one[6].

In the Figure1 we can see the difference between the two production sets. Efficiency estimates are generally higher with BCC, and rankings can differ in the two specifications. Note that equation(6) differs from equation(4) in that it has the additional convexity constraint on the λ_j, $\sum_j \lambda_j = 1$. In the frontier BCC we can find the different returns to scale: the portion of the frontier from the point A up to (but not including) B, establishes the increasing returns to scale[7]; point B has a constant returns to scale ; and all the points on the frontier BCC to the right B, in this case only point D, are forming the decreasing returns to scale. As with the CRS model, a DMU is BCC-efficient in the VRS model if after the solution of the equation(6) gets that its value of $\theta_o=1$ and all the slacks s_i^- and s_i^+ have a zero value. Hence, any CCR-efficient DMU can be also BCC-efficient. On the other hand, it is possible project the inefficient point C to the frontiers (points C' and C"); we see that is a horizontal projection, in the case of output-oriented model would involve a vertical projection from DMU C up to the frontier.

[6] In BBC model somehow ensuring a comparison at point an inefficient DMU is "benchmarked" alongside DMUs of a similar size.

[7] Point B is the point of maximum possible productivity, the point of technically optimal scale. Operation at any other point on the production frontier results in lower productivity. The DMUs A and D are efficient but it could have higher or lower productivity, i.e. they may still be able to improve its productivity by exploiting scale economies.

$$\sum_j \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0, \quad all\ i,j,r$$

$$\theta_o \ sin\ restricción \quad \textbf{(6)}$$

Este modelo esencialmente asegura que el punto proyectado de las DMU ineficientes en la frontera BCC DEA es una combinación convexa de las DMU observadas. En esta situación, los pesos λ- no suman a un valor menor o mayor que uno[7].

En la figura 1 podemos ver la diferencia entre los dos grupos de producción. Los estimados de eficiencia son generalmente más altos que BCC, y los rangos pueden diferir en las dos especificaciones. Nótese que la ecuación(6) difiere de la ecuación(4) en que tiene un límite adicional de convexidad en λ_j $\sum_j \lambda_j = 1$, . En la frontera BCC podemos encontrar los diferentes retornos a escala: la porción de la frontera desde el punto A hasta (pero no incluido) el punto B, establece los retornos crecientes a escala[8]; el punto B tiene retornos constantes a escala ; y todos los puntos en la frontera BCC hasta el punto B, en este caso sólo el punto D, forman los retornos a escala decrecientes. Como sucede con el modelo CRS, una DMU es BCC eficiente en el modelo si después de la solución de la ecuación(6) consigue que su valor $\theta_o=1$ y todos sus puntos flojos s_i^- y s_i^+ tengan un valor de 0. De ahí que, cualquier DMU CCR eficiente puede ser también BCC eficiente. Por otra parte, es posible proyectar el punto ineficiente C a las fronteras (puntos C' y C"); se ve que es una proyección horizontal, en el caso del modelo orientado de resultados involucraría una proyección vertical desde DMU c hasta la frontera.

[7] En el modelo BBC, de algún modo, asegura una comparación al punto de una ineficiencia en DMU es referenciado a lo largo de las DMU de similar tamaño.

[8] El punto B es el punto de máxima productividad posible, el punto de escala técnicamente óptimo. Una operación en cualquier otro punto de la producción de frontera resulta en productividad más baja. Las DMU A y D son eficientes pero pueden tener mayor o menor productividad; por ejemplo: pueden aún mejorar su productividad explotando las economías de escala.
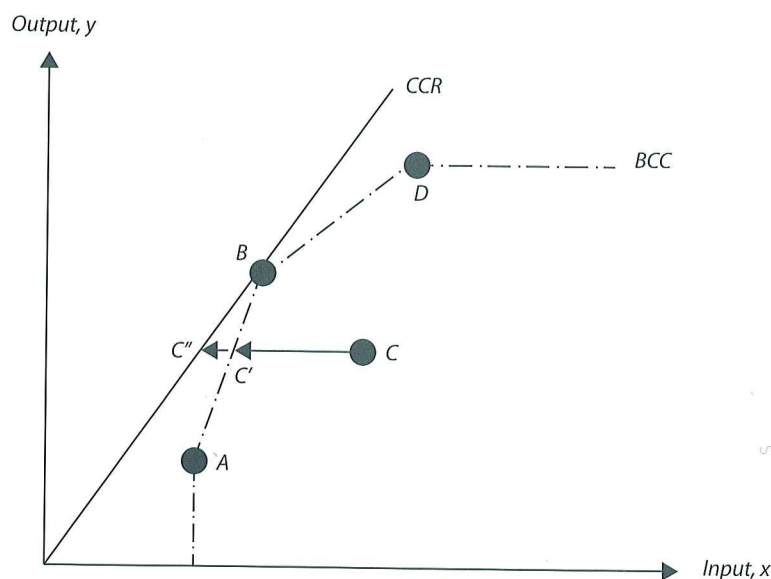
Figure 1 Difference of

Charnes et al. (1985) proposed to combine both models and formulated the called Pareto-Koopmans (PK) model. In this approach, the inputs are proportionally reduced while outputs remain fixed, and the outputs are proportionally increased while the inputs remain unchanged. This additive model has the same convex production than the BCC model and a DMU is PK efficient if and only if it is VRS-efficient and all its slacks are equal to zero. Specifically, the model is:

$$P_o = max \sum_r s_r^+ + \sum_i s_i^-$$

s.t.

$$x_{io} = \sum_j \lambda_j x_{ij} + s_i^-, \qquad i = 1, \dots, m$$

$$y_{ro} = \sum_j \lambda_j y_{rj} - s_r^+, \qquad r = 1, \dots, s$$

$$\sum_j \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0, \ all\ i, j, r \qquad (7)$$

This model has no scalar measure or efficiency ratio per se, unlike CCR and BCC models. The additive PK model can discriminate between efficient and inefficient DMUs by the existence of slacks but it does not measure the depth of the inefficiency, similar to θ_o in the CCR and BCC models.

To address the above shortcoming Tone (2001) defines the called slacks-based measure (SBM) which is invariant to the units of measurement and is monotone increasing in each input and

Charnes y otros (1985,) propusieron combinar los dos modelos y formularon el llamado modelo Pareto-Koopmans (PK). En este alcance, los aportes son proporcionalmente reducidos mientras que los resultados se arreglan, y los resultados se incrementan proporcionalmente, mientras que los aportes permanecen invariables. Este modelo aditivo tiene la misma producción convexa que el modelo BBC y una DMU es un PK eficiente si y sólo si es VRS eficiente y todos sus valores bajos son igual a cero. Específicamente, el modelo es:

$$P_o = max \sum_r s_r^+ + \sum_i s_i^-$$

s.t.

$$x_{io} = \sum_j \lambda_j x_{ij} + s_i^-, \qquad i = 1, \dots, m$$

$$y_{ro} = \sum_j \lambda_j y_{rj} - s_r^+, \qquad r = 1, \dots, s$$

$$\sum_j \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0, \ all\ i, j, r \qquad (7)$$

Este modelo no tiene una medida scalar o radio de eficiencia en si, a diferencia de los modelos CCR y BCC. El modelo aditivo PK puede discriminar entre DMU eficientes e ineficientes por la existencia de valores vagos, pero no mide la profundidad de la ineficiencia, similar a θ_o en los modelos CCR y BBC.

Para mencionar el fallo anterior, Tone (2001) define las llamadas medidas basadas en valores vagos (SBM), lo cual es invariable para las unidades de medición y es monótono si se

output slack[8]. This scalar measure deals directly with the input excesses and the output shortfalls of the decision making unit (DMU) evaluated.

Tone (2001) states that the following properties should be considered in designing the efficiency measures:

- *(P1) Invariant units:* The measure should be invariant with respect to the units of data.
- *(P2) Monotone:* The measure should be monotone decreasing in each slack in input and output.
- *(P3) Translation invariant:* The measure should be invariant under a parallel translation of the coordinate system applied.
- *(P4) Reference-set dependent:* The measure should be determined only by consulting the reference-set of the DMU concerned.

Tone (2001) sustains that the SBM model satisfies the properties (P1), (P2) and (P3). He also issues that since the beginning DEA employs piece-wise linear efficient frontiers whose area is spanned by efficient DMUs and that an inefficient unit is "inefficient" with respect to DMUs in its reference-set, the measure of efficiency should be determined by the reference-set dependent values as in the CCR and BCC models. In addition, it should not be influenced by the extreme values, e.g., the minimum and the maximum of the data set.

Based on the CCR and BCC models where it is considered that n DMUs have inputs $X = (x_{ij}) \in R^{m \times n}$ and in outputs $Y = (y_{rj}) \in R^{s \times n}$; it initially assumes that the data set is positive, i.e. $X > 0 \; and \; Y > 0$, although this assumption can be relaxed. Thus, production possibility P is defined such as in the former expression(5)

$$P = \left\{ (x, y) \backslash x \geq \sum_j X_j \lambda_j, \quad y \leq \sum_j Y_j \lambda_j, \; \lambda_j \geq 0 \right\} \quad (5)$$

being λ_j a non-negative vector in R^n, constraints λ, such as $\sum_j \lambda_j = 1$

[8] The Russell measure proposed by Färe and Lovell (1978), and later revised by Pastor et al. (1999) is considered as equivalent to SBM according to Cook and Seiford (2009).

incrementa en cada aporte y resultado vago[9]. Esta medición escalar tiene que ver directamente con el exceso de aportes y la falta de resultados de la toma de decisiones de DMU evaluadas.

Tone (2001) establece que las propiedades siguientes deberían ser consideradas para diseñar las medidas de eficiencia:

- *(P1) Unidades invariables:* la medición debería ser invariable con respecto a las unidades de los datos
- *(P2) Monótono:* la medición debe ser monótona decreciendo en cada valor vago en los aportes o resultados.
- P3)(*Traslación invariable:* la medición debería ser invariable bajo una traslación paralela del sistema coordinado aplicado.
- *(P4) Grupo de Referencia dependiente:* la medida debería ser determinada sólo consultando el grupo de referencia de las DMU que nos interesa.

Tone (2001) sostiene que el modelo SBM satisface las propiedades P1, P2 y P3. El también expresa que desde el principio DEA utiliza piezas inteligentes de fronteras eficientes lineares, cuya área se expande por las DMU, y que una unidad ineficiente es ineficiente con respecto a las DMU en su grupo de referencia, la medición de eficiencia debe ser determinada por los valores dependientes del grupo de referencia, así com en los modelos CCR y BCC. Además, no debe ser influenciado por los valores extremos, ejemplo: el mínimo y el máximo del grupo de datos.

Basados en los modelos CCR y BCC donde se considera que n DMU tienen aportes $X = (x_{ij}) \in R^{m \times n}$ [10]y en los resultados $Y = (y_{rj}) \in R^{s \times n}$; inicialmente asume que el grupo de datos es positivo, ejemplo: $X > 0 \; and \; Y > 0$, aunque esta asunción puede ser informal. De este modo, la posibilidad de producción P se define como en la expresión anterior (5).

$$P = \left\{ (x, y) \backslash x \geq \sum_j X_j \lambda_j, \quad y \leq \sum_j Y_j \lambda_j, \; \lambda_j \geq 0 \right\} \quad (5)$$

siendo λ_j un vector no negativo en R^n, restricciones , como $\sum_j \lambda_j = 1$.

[9] La medición de Russell propuesta por Fare y Lovell (1978), y luego revisada por Pastor y otros. (1999) está considerada como equivalente a SBM, de acuerdo con Cook y Seiford (2009)

[10] X es una matriz con n columnas (DMU siendo analizadas)y m filas (aportes). Y es una matriz con n columnas (DMU siendo analizadas) y m filas (aportes).

A certain DMU (x_0, y_0) is described as

$$x_0 = X\lambda + s^-, \quad (8)$$
$$y_0 = Y\lambda - s^+, \quad (9)$$

with $\lambda \geq 0, s^- \geq 0 \; and \; s^+ \geq 0$ the vectors $s^- \in R^m \; and \; s^+ \in R^s$ indicate the input excesses and output shortfalls of this expression (8) and (9) respectively, as we have seen the so-called slacks. From the conditions $X > 0 \; and \; \lambda \geq 0$, it holds:

$$x_o \geq s^- \quad \textbf{(10)}$$

Using s^- *and* s^+, Tone (2001) defines an index *p* as follows:

$$p = \frac{1 - (1/m)\sum_{i=1}^{m} s_i^-/x_{io}}{1 + (1/s)\sum_{r=1}^{s} s_r^+/y_{ro}} \quad \textbf{(11)}$$

According to Cooper et al. (2000), expression (11) could be interpreted as the ratio of mean input and output mix inefficiencies, that is, the relative proportional reduction rate of inputs and the relative proportional expansion of outputs. Here it can be verified that p satisfies the properties (P1)= units invariant because the numerator and denominator are measured in the same units for every item; and (P2)= monotone because increase in either s^- *or* s^+ (all else remains constant) will decrease p in a strictly monotone manner. Additionally, from expression (10), it holds

$$0 < p \leq 1 \quad \textbf{(12)}$$

Therefore, the final fractional program in λ, s^-, s^+ of Tone (2001) in order to estimate the efficiency of (x_0, y_0) is as follows:

[SBM]

minimize $$p = \frac{1-(1/m)\sum_{i=1}^{m} s_i^-/x_{io}}{1+(1/s)\sum_{r=1}^{s} s_r^+/y_{ro}}$$

s. t.

$$x_o = X\lambda + s^-,$$
$$y_o = Y\lambda - s^+,$$
$$\lambda, s^-, s^+ \geq 0 \quad \textbf{(13)}$$

Una DMU certera (x_0, y_0) se describe como:

$$x_0 = X\lambda + s^-, \quad (8)$$
$$y_0 = Y\lambda - s^+, \quad (9)$$

con $\lambda \geq 0, s^- \geq 0 \; and \; s^+ \geq 0$ los vectores $s^- \in R^m \; and \; s^+ \in R^s$ indican el exceso de aportes y el deficit de resultados de esta expresión (8) y (9) respectivamente. Como hemos visto los llamados valores vagos. De las condiciones $X > 0 \; and \; \lambda \geq 0$, se sostiene que:

$$x_o \geq s^- \quad \textbf{(10)}$$

Usando s^- *and* s^+, Tone (2001) define un índice p como sigue a continuación:

$$p = \frac{1 - (1/m)\sum_{i=1}^{m} s_i^-/x_{io}}{1 + (1/s)\sum_{r=1}^{s} s_r^+/y_{ro}} \quad \textbf{(11)}$$

De acuerdo a Cooper y otros. (2000), las expresiones (11) podrían ser interpretadas como el radio de media de la mezcla de las ineficiencias de aportes y resultados, esto es, la tasa de reducción proporcional relativa de aportes y la expansión proporcional relativa de resultados. Aquí puede ser verificado que p satisface las propiedades (P1)= unidades invariables, porque el numerador y el denominador son medidos con las mismas unidades para cada ítem; y (P2)= monótono, porque el aumento en s^- *o* s^+(todos los demás remanentes constantes) disminuirá p en una forma estrictamente monótona. Adicionalmente, de la expresión (10), se sostiene que:

$$0 < p \leq 1 \quad \textbf{(12)}$$

Entonces, el programa fraccional final en λ, s^-, s^+ de Tone (2001) para estimar la eficiencia de es (x_0, y_0) como sigue a continuación:

[SBM]

minimiza $$p = \frac{1-(1/m)\sum_{i=1}^{m} s_i^-/x_{io}}{1+(1/s)\sum_{r=1}^{s} s_r^+/y_{ro}}$$

s. t.

$$x_o = X\lambda + s^-,$$
$$y_o = Y\lambda - s^+,$$
$$\lambda, s^-, s^+ \geq 0 \quad \textbf{(13)}$$

Then Tone (2001) multiplies a scalar variable by both the denominator and the numerator of expression (13). This transformation is done because the goal is to minimize the numerator and it does not cause changes in p.

[SBMt]

$$\text{minimize} \quad \tau = t - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} ts_i^- / x_{io}$$

$$\text{s. t.} \quad 1 = t + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} ts_r^+ / y_{ro}$$

$$x_o = X\lambda + s^-$$

$$y_o = Y\lambda - s^+$$

$$\lambda \geq 0, \quad s^- \geq 0, \quad s^+ \geq 0, \quad t > 0 \quad (14)$$

The model given above is a nonlinear programming model since it contains the nonlinear term $ts_r^+ \ (r = 1, \ldots, s)$. However Tone (2001) transforms it into a linear program, using the Charnes-Cooper transformation, as follows. Defined as $S^- = ts^-, \ S^+ = ts^+ \ and \ \Lambda = t\lambda$

Thus, *[SBMt]* becomes the following linear program in $t, \ S^-, \ S^+ \ and \ \Lambda$:

[LP]

$$\text{minimize} \quad \tau = t - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} S_i^- / x_{i0}$$

$$\text{s. t.} \quad 1 = t + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} S_r^+ / y_{r0}$$

$$tx_o = X\Lambda + S^-$$

$$ty_o = Y\Lambda - S^+ \quad (15)$$

Letting the optimal solution of *[LP]* be

$$(\tau^*, t^*, \Lambda^*, S^{-*}, S^{+*})$$

This optimal solution is defined by

$$p^* = \tau^*, \ \lambda^* = \Lambda^*/t^*, \ s^{-*} = S^{-*}/t^*, \ s^{+*} = S^{+*}/t^* \quad (16)$$

Based on this optimal solution, Tone (2001) determines a DMU (x_0, y_0) as being *SBM-efficient* if $p^*=1$. This condition is equivalent to $s^{-*}=0$ (*no input excesses*), and $s^{+*}=0$ (*no output shortfalls*) for any optimal solution.

Entonces Tone (2001) multiplica una variable escalar por los dos, el denominador y el numerador de la expresión (13). Esta transformación se hace porque la meta es minimizar el numerador y no causa cambios en p.

[SBMt]

$$\text{minimiza} \quad \tau = t - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} ts_i^- / x_{io}$$

$$\text{s. t.} \quad 1 = t + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} ts_r^+ / y_{ro}$$

$$x_o = X\lambda + s^-$$

$$y_o = Y\lambda - s^+$$

$$\lambda \geq 0, \quad s^- \geq 0, \quad s^+ \geq 0, \quad t > 0 \quad (14)$$

El modelo anterior dado es un modelo de programación no linear, ya que contiene el término no linear $ts_r^+ \ (r = 1, \ldots, s)$. Sin embargo Tone (2001) lo transforma en un programa linear, usando la transformación de Charnes – Cooper, como se ve a continuación. Definido como $S^- = ts^-, \ S^+ = ts^+ \ and \ \Lambda = t\lambda$.

De este modo *[SBMt]*, se convierte en el siguiente programa linear en $t, \ S^-, \ S^+ \ and \ \Lambda$

[LP]

$$\text{minimiza} \quad \tau = t - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} S_i^- / x_{i0}$$

$$\text{s. t.} \quad 1 = t + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} S_r^+ / y_{r0}$$

$$tx_o = X\Lambda + S^-$$

$$ty_o = Y\Lambda - S^+ \quad (15)$$

Permite que la solución optima de *[LP]* sea

$$(\tau^*, t^*, \Lambda^*, S^{-*}, S^{+*})$$

Esta solución optima es definida por:

$$p^* = \tau^*, \ \lambda^* = \Lambda^*/t^*, \ s^{-*} = S^{-*}/t^*, \ s^{+*} = S^{+*}/t^* \quad (16)$$

Basados en esta optima solución, Tone (2001) determina una DMU(x_0, y_0) como *SBM - efficient* if $p^*=1$. Esta condición es equivalente a to $s^{-*}=0$ (*sin exceso de aportes*), y $s^{+*}=0$ (*sin déficit de resultados*) para cualquier solución óptima.

For an SBM inefficient DMU (x_0, y_0), it holds that $x_o = X\lambda^* + s^{-*}$, and $y_o = Y\lambda^* - s^{+*}$

The DMU(x_0, y_0) can be improved and become efficient by *deleting the input excess and augmenting the output shortfall as follows.*

$$x_o \leftarrow x_o - s^{-*} \quad (17)$$

$$y_o \leftarrow y_o + s^{+*} \quad (18)$$

Based on λ^*, Tone (2001) defines the reference-set to (x_0, y_0) as the set of indices corresponding to positive λ^*_js. The reference-set R_0 is therefore.

$$R_o = \{j | \lambda_j^* > 0,\ j = 1, \dots n\} \quad \textbf{(19)}$$

Now (x_{i0}, y_{r0}) can be expressed in terms of the reference-set R_0 as follows

$$x_o = \sum_{j \in R_0} x_j \lambda_j^* + s^{-*} \quad \textbf{(20)}$$

$$y_o = \sum_{j \in R_0} y_j \lambda_j^* - s^{+*} \quad \textbf{(21)}$$

Tone (2001) adds some bounds on the slacks[9]. This operation is called the SBM-projection. The projection of DMU is obtained as follows

$$\bar{x}_0 = x_0 - s^{-*} = \sum_{j \in R_0} x_j \lambda_j^* \quad \textbf{(22)}$$

$$\bar{y}_0 = y_0 + s^{+*} = \sum_{j \in R_0} y_j \lambda_j^* \quad \textbf{(23)}$$

SBM p^* depends only on s^{-*} *and* s^{+*}, i.e., the reference-set dependent value. That is, p^* is not affected by values attributed to other DMUs that are not included in the reference-set R_0.

In summary, this article has presented the basic ideas about the most extensively used DEA models. Firstly the CCR model assumes that constant returns to scale prevails at the efficient frontiers, and secondly the BCC, Additive

[9] Subject to $s^- \le s_0^{-B}$ *and* $s^+ \le s_0^{+B}$, where the vector $s_0^{-B}(s_0^{+B})$ is the upper bound of input reduction or output enlargement of the DMU and should be specified for each DMU.

Para una SBM ineficiente DMU(x_0, y_0), se sostiene que $x_o = X\lambda^* + s^{-*}$, y $y_o = Y\lambda^* - s^{+*}$

La DMU(x_0, y_0) puede ser mejorada y volverse eficiente *eliminando el exceso de aportes y argumentando el déficit de resultados como sigue a continuación:*

$$x_o \leftarrow x_o - s^{-*} \quad (17)$$

$$y_o \leftarrow y_o + s^{+*} \quad (18)$$

Basados en λ^*, Tone (2001) define el grupo de referencia para (x_0, y_0) como el grupo de indices correspondientes al positivo λ^*_js. El grupo de referencia R_0 es entonces:

$$R_o = \{j | \lambda_j^* > 0,\ j = 1, \dots n\} \quad \textbf{(19)}$$

Ahora (x_{i0}, y_{r0}) puede ser expresada en términos de grupo de referencia R_0 como se ve a continuación.

$$x_o = \sum_{j \in R_0} x_j \lambda_j^* + s^{-*} \quad \textbf{(20)}$$

$$y_o = \sum_{j \in R_0} y_j \lambda_j^* - s^{+*} \quad \textbf{(21)}$$

Tone (2001) añade algunos límites en los valores vagos[11]. Esta operación es llamada la proyección SBM. La proyección de DMU se obtiene como se puede ver a continuación:

$$\bar{x}_0 = x_0 - s^{-*} = \sum_{j \in R_0} x_j \lambda_j^* \quad \textbf{(22)}$$

$$\bar{y}_0 = y_0 + s^{+*} = \sum_{j \in R_0} y_j \lambda_j^* \quad \textbf{(23)}$$

SBM p^* depende sólo de s^{-*} *and* s^{+*}, ejemplo: el valor dependiente del grupo de referencia. Esto es, no se afecta por valores atribuidos a otras DMUs que no estén incluidas en el grupo de referencia R_0.

En resumen, este artículo ha presentado ideas básicas acerca de los modelos DEA más ampliamente usados. En primer lugar, el modelo

[11] Sujeto a $s^- \le s_0^{-B}$ *and* $s^+ \le s_0^{+B}$, donde el vector $s_0^{-B}(s_0^{+B})$ es el límite superior de la reducción de aprtes o ampliación de resultados de las DMU y deben ser especificadas por cada DMU.

model, and SBM model omits this assumption. Every DEA model allows us to analyze multiple outputs and multiple inputs without assuming functional forms between these factors, which is an important difference with respect to the conventional regression-based methods. This article has also highlighted that there are three basic orientation types, input-oriented focused at reducing the inputs amounts while keeping the current output levels; the other called output-oriented, which maximizes output levels under the current inputs; and one third, based on the additive and SBM models dealing with the input excesses and output shortfalls simultaneously. In any case, the efficiency determination into a set of DMUs will be the same goal of these set of methods. Table 1 shows a recap of some important topics between basic DEA models treated briefly in this article.

It is important to note that further DEA models were developed in the following years through multilevel DEA models, multiplier restrictions, considerations regarding the status of variables and data variation (see Cook and Seiford, 2009)[10]. The refinement of these methodologies in the search for more appropriate evaluations is a challenging issue in the literature.

CCR asume que los retornos constantes a escala prevalecen a las fronteras eficientes, y en segundo lugar el modelo Aditivo BCC, y el modelo SBM omiten la asunción. Cada modelo DEA nos permite analizar resultados múltiples y también aportes múltiples sin asumir formas funcionales entre estos factores, lo cual es una diferencia importante con respecto a los métodos convencionales basados en regresión. Este artículo también ha resaltado que hay tres tipos de orientación básicos, de aportes orientados enfocados en reducir los montos de aportes, mientras mantienen los niveles de rendimiento actuales; los otros llamados de resultados orientados, los cuales maximizan los niveles de resultados bajo los aportes actuales; y hay un tercero, basado en los modelos Aditivos y SBM, que se encargan del exceso de aportes y déficit de resultados simultáneamente. En cualquier caso, la determinación de eficiencia en un grupo de DMU tendrá la misma meta de estos grupos de métodos. La Tabla 1 muestra un recuento de algunos temas importantes entre los modelos básicos DEA que se han tratado brevemente en este artículo.

Es importante notar más bien que los modelos DEA fueron desarrollados en los siguientes años a través de los modelos multinivel DEA, las restricciones del multiplicador, consideraciones que tienen que ver con el estado de las variables y variación de datos (véase Cook y Seiford, 2009)[12]. La depuración de estas metodologías en busca de evaluaciones más apropiadas es un asunto desafiante en la literatura.

[10] With respect to data variation, it is of great interest the subject of sensitivity analysis which can influence the efficiency status of DMUs. Among these issues both ranking problems and size problems of DMUs are important. One approach to the ranking problem is that provided by the super efficiency model of Andersen and Petersen (1993). This model involves executing the CRS o VRS models, but under the assumption that the DMU being evaluated is excluded from the reference set. It can also be thought of as a measure of stability, evaluating changes over the time of a specific input data.

[12] Con respecto a la variación de datos, es de gran interés el tema de análisis de sensibilidad el cual puede influenciar el estado de eficiencia de las DMU. Entre estos temas de interés, los problemas de rango y de tamaño de las DMU son importantes. Un enfoque al problema de rango es aquel dado por el súper modelo de eficiencia de Andersen y Petersen (1993). Este modelo incluye la ejecución de los modelos de CRS o VRS, pero bajo la asunción de que las DMU que sean evaluadas se excluye del grupo de referencias. Se puede también pensar que es una medición de estabilidad, cambios de evaluación sobre el tiempo de un grupo de datos específicos de aportes.

ModelC	CR	BCC	ADD	SBM
Data X	Semi-p	Semi-p	Free	Semi-p
Data Y	Free	Free	Free	Free
Trans invariance X	No	No	Yes	No
Trans, invariance Y	No	Yes	Yes	No
Units invariance	Yes	Yes	No	Yes
	[0,1]	[0,1]	No	[0,1]
Tech. or Mix	Tech.	Tech.	Mix	Mix
Returns to scale	CRS	VRS	C(V)RS	C(V)RS

Semi-p = semi positive, means nonnegative with at least one positive element in the data for each DMU. Free permit negative, zero or positive data. Tech. or Mix indicates whether the model measures are by technical efficiency or mix efficiency[11]. CRS and VRS mean constant and variable returns to scale, respectively. The variable returns to scale of ADD and SBM depends on the added constraint $\lambda = 1$.●

Semi-p = semi positivo, significa no negativo con al menos un elemento positivo en los datos para cada DMU. Libre permite datos negativos, cero o positivos. Tech. or Mix indica si las mediciones del modelo son hechas por eficiencia técnica o eficiencia mixta[13]. CRS y VRS significan retornos a escala constantes y variables, respectivamente. Los retornos variables a escala de ADD y SBM dependen de en los límites se añada $\lambda = 1$.●

---

[11] In the case of the SBM the expression (13) can be transformed into $p = \left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{x_{io}-s_i^-}{x_{io}}\right)\left(\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\frac{y_{ro}+s_r^+}{y_{ro}}\right)^{-1}$ the ratio $\frac{x_{io}-s_i}{x_{io}}$ evaluates the relative reduction rate of input i and, therefore, the first term corresponds to the mean proportional reduction rate of inputs or input mix inefficiencies. This may be similarly interpreted in the second term for the outputs of the model. Accordingly, SBM p can be interpreted as the ratio of mean input and output mix inefficiencies.

[13] En el caso de SBM la expression (13) se puede transformer en $p = \left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{x_{io}-s_i^-}{x_{io}}\right)\left(\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\frac{y_{ro}+s_r^+}{y_{ro}}\right)^{-1}$ el radio $\frac{x_{io}-s_i}{x_{io}}$ evalúa la reducción relativa de la tasa de aportes i y entonces, el primer término corresponde a la media de la reducción proporcional de la tasa de aportes o de las ineficiencias de aportes mixtas. Esto puede ser igualmente interpretado en el segundo término para el resultado del modelo. En consecuencia, SBM p puede ser interpretado como el radio de la media de las ineficiencias mixtas de aportes y resultados.

References

- Andersen, P., & Petersen, N. C. (1993). A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis. Management Science, 1261-1264.
- Banker, R. D., Charnes, A., & Cooper, W. W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. Management Science, 1078-1092.
- Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1981). Evaluating program and managerial efficiency: An application of data envelopment analysis to program follow through. Management Science, 668-697.

- Charnes, A., & Cooper, W. (1962). Programming with linear fractional functionals. Naval Research Logistics Quarterly, 9(3-4), 181-186.
- Charnes, A., Cooper, W. W., Golany, B., Seiford, L., & Stutz, J. (1985). Foundations of data envelopment analysis for pareto-koopmans efficient empirical production functions. Journal of Econometrics, 30(1-2), 91-107.
- Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. European Journal of Operational Research, 2(6), 429-444.
- Cobb, C. W., & Douglas, P. H. (1928). A theory of production. The American Economic Review, 18(1), 139-165.
- Coelli, T., Prasada Rao, D.S., O'Donnell, Christopher J.,Bettese, George E. (2005). An introduction to efficiency and productivity analysis. Springer.
- Cook, W. D., & Seiford, L. M. (2009). Data envelopment analysis (DEA)-thirty years on. European Journal of Operational Research, 192(1), 1-17.
- Cooper, W. W., Seiford, L. M., & Tone, K. (2000). Data envelopment analysis: A comprehensive text with models, applications, references and DEA-solver software. Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Färe, R., & Knox Lovell, C. A. (1978). Measuring the technical efficiency of production. Journal of Economic Theory, 19(1), 150-162.
- Farrell, M. J. (1957). The measurement of productive efficiency. Journal of the Royal Statistical Society, 120(3), 253-290.
- Fried, H. O., Lovell, C. A. K., & Schmidt, S. S. (2008). The measurement of productive efficiency and productivity growth. Oxford University Press, USA.
- Malmquist, S. (1953). Index numbers and indifference surfaces. Trabajos de Estadística y de Investigación Operativa. Springer, 4(2), 209-242.
- Pastor, J. T., Ruiz, J. L., & Sirvent, I. (1999). An enhanced DEA Russell graph efficiency measure. European Journal of Operational Research, 115(3), 596-607.
- Schmidt, P. (1985). Frontier production functions. Econometric Reviews, 4(2), 289-328.
- Tone, K. (2001). A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis. European Journal of Operational Research, 130(3), 498-509.
- Tone, K. (2010). Variations on the theme of slacks-based measure of efficiency in DEA. European Journal of Operational Research, 200(3), 901-907.